



РАЗРАБОТКА РОБАСТНОГО АЛГОРИТМА ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Алексей Шолохов

Учебно-научный комплекс “Институт прикладного системного анализа”
Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”
просп. Победы, 37, корпус № 35, 03056, Киев
e-mail: gyroalex@mail.ru

Резюме: Рассмотрена эллипсоидальная аппроксимация пересечения эллипсоида и гиперслоя как основа алгоритма оценивания состояний линейной управляемой системы, множество возможных состояний которой представлено эллипсоидом, а наблюдения – гиперслоем. Данное представление рассматривается как аналог фильтра Калмана. Исследованы условия совместности априорного состояния системы и апостериорной измерительной информации и чувствительность алгоритма к выбору его параметров. Показана зависимость улучшения оценки состояния системы от относительной ширины гиперслоя. Полученный алгоритм по сравнению с известными решениями при незначительном снижении точности много проще в реализации и устойчивее в работе в смысле нарушения априорных предположений.

Ключевые слова: Линейная управляемая система, множество достижимости, гиперслоем множества наблюдения состояний системы, аппроксимирующий эллипсоид, гарантированное оценивание состояний, робастный алгоритм, критерий информативности наблюдений, шаг алгоритма, фильтр Калмана.

DEVELOPMENT OF THE GUARANTEED ESTIMATION ROBUST ALGORITHM OF LINEAR CONTROLLED SYSTEM STATES

Aleksey V. Sholokhov

Educational-Scientific Complex “Institute for Applied System Analyses”
by the National Technical University of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”
37, Peremogy Avenue, Academic Building #35, Kyiv 03056, Ukraine
e-mail: gyroalex@mail.ru

Abstract: Ellipsoidal approximation of the ellipsoid and hyperlayer crossing has been considered as a basis of the algorithm of states estimation of the linear controlled system whose set of possible states is represented with an ellipsoid, and observations – with a hyperlayer. This representation is considered as an analogue of Kalman filter. The conditions of a priori system state and a posteriori measurement information compatibility and sensitivity of the algorithm to a choice of its parameters have been investigated. Dependence of the system state estimate improvement on a relative width of the hyperlayer of a set of observations has been shown. The obtained algorithm in comparison with the known solutions at minor degradation of accuracy is much easier in realization and stabler in operation from the standpoint of prior guesses violation.

Keywords: Linear controlled system, a set of attainability, a hyperlayer of a set of system states observation, approximating ellipsoid, guaranteed state estimation, a robust algorithm, a criterion of observations information value, a step of algorithm, Kalman filter.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе разрабатывается и исследуется робастный алгоритм гаранти-

рованного оценивания множества возможных состояний линейной управляемой системы [1]. Под робастностью в статье подразумевается соответствие алгоритма двум условиям: во-

первых, сохранением работоспособности при нарушении априорных предположений о параметрах наблюдаемого объекта; во-вторых, “неухудшаемостью” оценки состояния объекта в процессе оценивания. Для этого в алгоритме выполняется проверка промежуточных и выходных результатов на соответствие априорным предположениям и текущей оценке состояния системы. При нарушении априорных предположений или ухудшении оценки, выполняется переопределение параметров алгоритма. Геометрически результат работы алгоритма можно представить как эллипсоид, аппроксимирующий пересечение априорного эллипсоидального множества достижимости линейной управляемой системы [1] и гиперслоя, представляющего согласно данным наблюдения множество возможных состояний управляемой системы, ограниченное двумя параллельными гиперплоскостями. Такой алгоритм является аналогом фильтра Калмана для оценивания состояний систем с неизвестными статистическими характеристиками “шума” измерений и внешних воздействий. Физически данный алгоритм можно интерпретировать как выделение сигнала из измерений, содержащих “шум” измерителя и или неконтролируемые внешние возмущения, действующие на систему. На практике такая задача возникает, например, при ускоренной выставке гиросtabilизированных платформ в условиях статистической неопределенности внешних воздействий; коррекции в комплексированных системах ориентации и навигации [2–7], когда класс точности этих приборов не позволяет добиться заметного улучшения качества работы путем применения сложных алгоритмов обработки информации. Часто в измерительных системах по техническим или экономическим причинам возможно провести замену элементной базы на современную – более производительную, и кроме того, к ним предъявляются требования на ограничение энергопотребления при выдаче сигналов управления с высокой частотой. Для удовлетворения этим ограничениям мощность микропроцессора, который обрабатывает поступающую измерительную информацию, приходится ограничивать и применять упрощенные алгоритмы оценивания, в которых существенно меньше арифметических операций, а точность оценивания является приемлемой.

В качестве критерия оптимальности возьмем минимум объема аппроксимирующего эллипсоида. Данный критерий удобен

инвариантностью аффинных преобразований относительно исходных множеств для получения минимального эллипсоида [1]. Параметры эллипсоида минимального объема, описанного вокруг сферического слоя или сегмента, были найдены в [8] для полусферы и в [9] для гиперслоя. В [10] был получен алгоритм эллипсоидальной аппроксимации пересечения эллипсоида и гиперплоскости, где объем аппроксимирующего эллипсоида, зависящий от нескольких параметров, регулируется выражением-функцией этих параметров, называемым шагом алгоритма. Дальнейшие работы были посвящены разработке универсальных и более удобных алгоритмов получения указанной аппроксимации. В работе [11], например, для получения параметров оптимального в смысле минимума объема эллипсоида, аппроксимирующего пересечение эллипсоида и гиперслоя необходимо решать квадратное уравнение.

В [12] был предложен алгоритм, где шаг в алгоритме получения аппроксимирующего эллипсоида имеет всего лишь два значения в зависимости от степени пересечения гиперслоя с исходным эллипсоидом. Хотя это и сильно упрощает вычисления, но возможность уточнить эллипсоидальную оценку состояния системы, соответственно, существенно уменьшается. В [13] получено условие выбора шага для построения аппроксимирующего эллипсоида в случае, когда исходный эллипсоид и гиперслоем лишь касаются друг друга. В данной работе получено простое выражение для шага алгоритма, позволяющее полнее использовать измерительную информацию, то есть уточнять состояние системы при большем “шуме”. По сравнению с работой [11] получен и исследован более простой алгоритм при незначительном отступлении от оптимальности. Это позволяет легче запрограммировать и отладить алгоритм, а также затратить меньше вычислительных ресурсов. На взгляд автора, разумное упрощение всегда приметя практикующими специалистами, даже если их квалификация и возможности аппаратуры позволяют использовать более сложные алгоритмы.

Выбор подстроечного параметра или шага для получения удовлетворительной аппроксимации пересечения при его изменении в широком диапазоне можно осуществить, используя различные неравенства [14], в пределе сходящиеся к оптимальной оценке.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исходный эллипсоид E_j задан в виде

$$\{x_j : (x_j - \bar{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \leq 1\} \quad (1)$$

$x_j \in E_j, \quad j \in T, \quad j = 1, \dots, k, \quad (k < \infty)$ – дискретное время, а T – множество его возможных значений; $E_j \subset X_j = R^n$ – компактное множество возможных значений исходного состояния, \bar{x}_j и $H_j^T = H_j > 0$ – заданные n - мерный вектор и $(n \times n)$ -матрица, соответственно. Изменение E_j с течением времени определяется свойствами динамической системы, описанной, например в [13].

Уравнение наблюдения

$$y_j = h^T x_j + \xi_j, |\xi_j| \leq c, j = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $y_j \in R^1; \quad h \in R^n, \quad \|h\| = 1$ – параметр измерительного устройства; $\xi_j \in R^1$ – ограниченная помеха измерений; $c \geq 0$ – заданная константа. Уравнение (2) в пространстве R^n определяет гиперслоем

$$S_j = \{x_j : (y_j - h^T x_j)^2 \leq c^2\}. \quad (3)$$

На основе (1) и (3) строится гарантированная эллипсоидальная оценка (аппроксимирующий эллипсоид) $E_{j+1} \supset E_j \cap S_j, \quad x_{j+1} \in E_{j+1}$

$$x_{j+1} : \{(x_{j+1} - \bar{x}_{j+1})^T H_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1}) \leq 1\} \quad (4)$$

меньший по объему, чем исходный эллипсоид (1). Если это невозможно, то оставляется исходный эллипсоид.

В [13] были получены выражения для построения аппроксимирующего эллипсоида, параметры которого зависят от степени пересечения эллипсоида множества достижимости и гиперслоя:

$$\bar{x}_{j+1} = \bar{x}_j + \tau_j \frac{H_j h_j}{e_j} \sigma_j \quad (5)$$

$$H_{j+1} = (H_j - \tau_j \frac{H_j h h^T H_j}{e_j^2}) \gamma_j^2 \quad (6)$$

$$\gamma_j^2 = 1 + \tau_j \left(\frac{1}{1 - \tau_j} \chi_j^2 - \sigma_j^2 \right) \quad (7)$$

$$\tau_j \leq \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}, \quad 0 \leq \tau_j < 1 \quad (8)$$

Здесь:

$$e_j^2 = h_j^T H_j h_j; \quad \sigma_j = \frac{\Delta_j}{e_j}; \quad \chi_j^2 = \frac{c^2}{e_j^2};$$

$\Delta_j = y_j - h_j^T \tilde{x}_j$ – расстояние от центра исходного эллипсоида до середины гиперслоя;

$h_j \in R^n$ – параметр наблюдающего устройства;

\tilde{x}_j – центр исходного эллипсоида;

\tilde{x}_{j+1} – центр аппроксимирующего эллипсоида;

τ_j – шаг алгоритма;

$q_j^{-1} \geq c e_j$ – подстроечный параметр, полученный из условия использования наблюдения (2) в случае, когда гиперслоем лишь касается исходного эллипсоида. В общем случае для уточнения состояния наблюдаемой системы должно быть $q_j > 0$.

Условие совместности априорного эллипсоида и наблюдений $1 + \chi \geq |\sigma|$, в случае нарушения которого выполняем масштабирование $H_{j+1} = \sigma_j^2 H_j$.

Условие информативности наблюдений [12]

$$\frac{\det H_{j+1}}{\det H_j} = (1 - \tau_j) \left(1 + \tau_j \left(\frac{\chi_j^2}{1 - \tau_j} - \sigma_j^2 \right) \right)^n \leq 1, \quad (9)$$

то есть критерий минимизации.

Требуется найти приближенные простые выражения для выбора шага τ_j процедуры построения аппроксимирующего эллипсоида, которые, с одной стороны, гарантируют выполнение условия информативности, а с другой – дают аппроксимацию, близкую к оптимальной, найденную в работе [11].

На рис. 1 для случая $n = 2$ проиллюстрировано пересечение эллипсоида E_j с гиперслоем наблюдений S_j и аппроксимация пересечения эллипсоидом E_{j+1} .

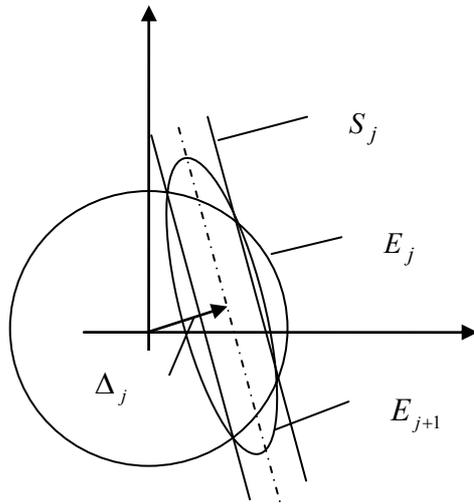


Рис. 1 – Эллипсоидальная аппроксимация пересечения эллипсоида с гиперслоем

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ГИПЕРСЛОЯ ЭЛЛИПСОИДОМ

Функция информативности в работе [11] при переходе на обозначения, используемые в статье, совпадает с условием (9). Для нахождения минимума необходимо продифференцировать правую часть (9), приравнять к нулю, решить полученное квадратное уравнение и взять корень, удовлетворяющий $0 \leq \tau_j < 1$.

Полученное решение относительно τ_j при преобразовании к подстроечному параметру q_j будет иметь такой же вид, что и оптимальное решение в [11]. Поскольку нас интересует по возможности простое выражение для τ_j , но не намного отличающееся от оптимального по своему значению во всех случаях пересечения, получим выражение для τ_j из упрощенного выражения, удовлетворяющего (9).

Прологарифмируем (9) (здесь и далее индексы при переменных для упрощения записи опущены): $\ln(1-\tau) + n \ln\left(1 + \tau\left(\frac{\chi^2}{1-\tau} - \sigma^2\right)\right) \leq 0$.

Откуда $n \ln\left(1 + \tau\left(\frac{\chi^2}{1-\tau} - \sigma^2\right)\right) \leq \ln\frac{1}{(1-\tau)}$. Имея условие $0 \leq \tau < 1$, на основании известного неравенства [12]: $\ln(1+\tau) \leq \tau, \forall \tau > -1$, мы,

используя неравенство $\tau \leq \ln\frac{1}{1-\tau}$, переходим к следующему выражению:

$$n \ln\left(1 + \tau\left(\frac{\chi^2}{1-\tau} - \sigma^2\right)\right) \leq n\tau\left(\frac{\chi^2}{1-\tau} - \sigma^2\right), \quad \text{и,}$$

наконец, к неравенству $n\tau\left(\frac{\chi^2}{1-\tau} - \sigma^2\right) \leq \tau$,

которое стремиться к равенству быстрее, чем (9). Отсюда окончательно примем

$$\tau = \frac{1 + n(\sigma^2 - \chi^2)}{1 + n\sigma^2} \quad (10)$$

Приравняв правые части (10) и (8), получим подстроечный параметр q :

$$q = \frac{1 + n(\sigma^2 - \chi^2)}{n\chi^2 e^2}. \quad (11)$$

Равенству в (10) и (11) будет соответствовать наименьшее значение левой части выражения (9). Параметру q соответствует в [11] аналогичный параметр η , который находится как положительный корень квадратного уравнения (обозначения приняты употребляемые в нашей статье):

$$\eta = \frac{(1-\sigma^2) - (2n-1)\chi^2 + \sqrt{D}}{2(n-1)\chi^2 e^2} \quad (12)$$

где: $D = ((2n-1)\chi^2 - (1-\sigma^2))^2 - 4(n-1)\chi^2(n(\chi^2 - \sigma^2) - 1)$.

Если корни квадратного уравнения не положительны, то происходит “отказ от результата наблюдения” и оставляется исходный эллипсоид. Такое же требование, согласно (8), предъявляется и к параметру q (если $q = 0$, то $q^{-1} = \infty$ и, следовательно, $\tau = 0$, что соответствует “отказу от результата наблюдения”). Для принятия решения о выборе между исходным и аппроксимирующим эллипсоидами достаточно того, чтобы (11) или (12) были положительны. Это обеспечивает “неухудшаемость” оценки в процессе оценивания, то есть робастность алгоритма.

Приравняв неравенство (11) для q и выражение (12) для η к нулю, найдем граничную полуширину гиперслоя χ_{bound} , при соответствующем расстоянии до его середины ($0 \leq \sigma < \infty$), при которой происходит “отказ от результата наблюдения”. Она получается одинаковой в обоих случаях

$$\chi_{bound} = \sqrt{\frac{1+n\sigma^2}{n}}. \quad (13)$$

Здесь χ – нормированная полуширина гиперслоя (см. (7)). Если же полуширина гиперслоя меньше граничной: $\chi < \chi_{bound}$, то происходит “уточнение” состояния наблюдаемой системы, но аппроксимирующий эллипсоид, получаемый при выборе параметра согласно (11), будет большим по объему – субоптимальным, чем при выборе параметра согласно (12).

В [11] предлагается переопределять параметры гиперслоя – полуширину χ и расстояние σ до его середины в случае, когда пересечение эллипсоида и гиперслоя меньше, чем ширина всего гиперслоя, т.е., если $|\sigma| + \chi > 1$. В этом случае переопределенные параметры будут удовлетворять $|\sigma| + \chi = 1$. Представляется полезным определить максимальное значение χ и соответствующее значение σ , при котором оно достигается – при условии равенства в (9) и выполнении условия $\chi + |\sigma| = 1$. Подставив выражение (13) в $\chi + |\sigma| = 1$ и соблюдая равенство в (9), получим

$$\chi = \frac{n+1}{2n} \text{ при } \sigma = \frac{n-1}{2n} \text{ и } |\sigma| + \chi = 1 \quad (14)$$

На рис. 2 и 3 показаны графики зависимости информативности наблюдений (отношения $\det H_{j+1} H_j^{-1}$ – критерия минимизации) от полуширины гиперслоя для случая $n=2$. На рис. 2 середина гиперслоя наблюдений проходит через центр исходного эллипсоида, то есть $\sigma = 0$. На рис. 3 $\sigma = (n-1)/2n$. По оси абсцисс отложена ширина гиперслоя χ , а по оси ординат – значение критерия информативности (9). Сплошная линия соответствует шагу по формуле (11), то есть субоптимальному выбору шага,

прерывистая – формуле (12), то есть оптимальному выбору шага.

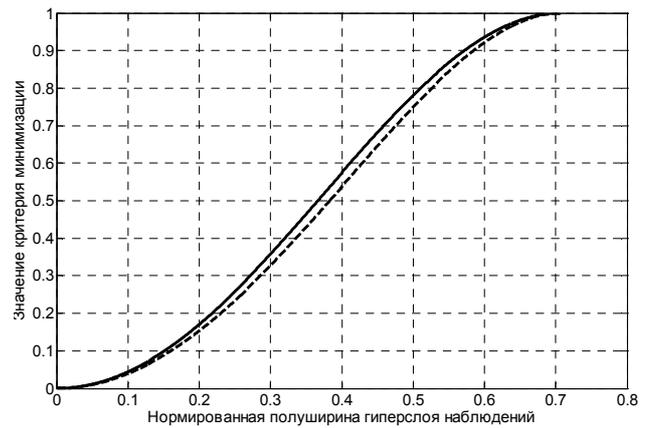


Рис. 2 – Изменение информативности наблюдений в зависимости от ширины гиперслоя при $\sigma = 0$

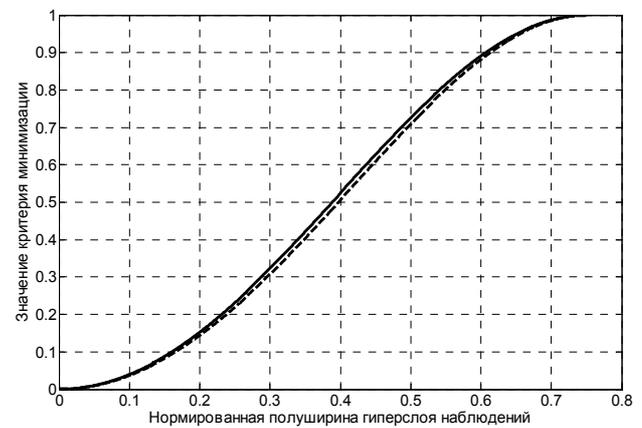


Рис. 3 – Изменение информативности наблюдений в зависимости от ширины гиперслоя при $\sigma = (n-1)/2n$

Как видно из рис. 2, 3, где штриховой линией показан график при выборе шага согласно (12), а сплошной – согласно (11), различие в информативности невелико. Таким образом, объем субоптимального эллипсоида ненамного превышает объем оптимального эллипсоида. Из выражения (13), если положить $\sigma = 0$, видно, что с ростом размерности n пространства состояний указанное различие будет уменьшаться. В остальных случаях, т.е. при $\sigma \neq 0$ и фиксированном значении $\chi < \chi_{bound}$, с ростом n различие в информативности будет увеличиваться до определенного предела.

Найдем, как изменяется граничная ширина гиперслоя – когда происходит отказ от наблюдения – при перемещении середины гиперслоя от центра исходного эллипсоида к его краю и с ростом размерности пространства

состояний. Положим в выражении (13) $\sigma = 0$, что соответствует прохождению середины гиперслоя через середину эллипсоида. Тогда $\chi = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $\sigma = 0$. Из (13) и (14) видно, что максимально допустимое значение χ_{bound} растет с ростом σ , а после прохождения значения $\sigma = \frac{n-1}{2n}$ – при его переопределении согласно [11] – будет уменьшаться с одновременным уменьшением объема аппроксимирующего эллипсоида по сравнению с исходным. Устремив $n \rightarrow \infty$, получим из (13) и (14)

$$\lim_{\sigma=0, n \rightarrow \infty} \chi_{bound} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{bound} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Из (15) делаем вывод, что с ростом n требования к наблюдающему устройству растут. Таким образом, для уточнения состояния системы при оценивании большого числа переменных до такого же значения неопределенности состояния, что и в случае оценивания меньшего числа переменных, допуск на “шум” наблюдающего устройства необходимо уменьшить. Кроме того, хотя в случае, близком к (14), т.е. при пересечении гиперслоя и эллипсоида не “по центру”, уточнение состояния наблюдаемой системы будет “сильнее” – вплоть до точки в случае лишь касания гиперслоя с эллипсоидом – постоянно иметь точечную оценку, из-за наличия неопределенности, не удастся. Возьмем наихудший случай, соответствующий прохождению середины гиперслоя через центр исходного эллипсоида (полагаем в (13) $\sigma = 0$). Тогда параметры эллипсоида состояний наблюдаемой системы (в том числе и его объем) будут связаны с параметрами измерительного устройства, помехой измерения, свойствами системы и внешним возмущением следующей зависимостью

$$h^T H h \geq c^2 n \tag{16}$$

где H рекуррентно вычисляется согласно формуле эллипсоидальной аппроксимации

суммы двух эллипсоидов (см., например [13]) и зависит от динамических свойств наблюдаемой системы и внешнего возмущения, действующего на эту систему. Необходимо заметить, что даже если система наблюдаема в смысле критерия наблюдаемости Калмана [15], в реальности наблюдаемость может быть неудовлетворительной. Свойства матрицы H определяются свойствами наблюдаемой системы и уровнем внешнего возмущения. Вследствие указанных свойств и причин собственные числа матрицы H могут значительно отличаться друг от друга или, тем более, она может быть плохо обусловленной [16]. Если вектор h является собственным или близким к таковому вектором матрицы, соответствующим наименьшему собственному числу матрицы H , то мы будем иметь малый объем аппроксимирующего эллипсоида – с малой неопределенностью по одной фазовой координате, соответствующей наименьшему собственному числу, и с большой неопределенностью по другим фазовым координатам. Таким образом, при выборе наблюдающего устройства необходимы соответствующие исследования.

Для демонстрации робастных свойств алгоритма воспользуемся результатами [13].

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пусть поведение линейной управляемой системы описывается уравнением

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + L_n \zeta_j, |\zeta_j| \leq d, x_0 \in E_0, \tag{17}$$

$$E_0 = \{x_0 : (x_0 - \bar{x}_0)^T \bar{H}_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \leq 1\}. \tag{18}$$

где A – $(n \times n)$ -матрица; L_n и B – n -мерные векторы. Пара (A, B) – управляема [15]; $\zeta_j \in R^1$ – скалярная помеха-возмущение, ограниченная заданной константой $d \geq 0$; \bar{x}_0 и $\bar{H}_0^T = \bar{H}_0 > 0$ известные n - мерный вектор и $(n \times n)$ -матрица. Управления $u_j \in R^1$ заданы на всем интервале T управления, образуя программу

$$\{u_j \in R^1, j \in T\}. \tag{19}$$

Множество достижимости системы (17) при управлении (19) будем строить согласно [17]:

$$\bar{x}_{j+1} = A\bar{x}_j + Bu_j, \tag{20}$$

$$E_{j+1} = \{x_{j+1} : (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1})^T H_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1}) \leq 1\}$$

Здесь: $\{\bar{x}_j, j \in T\}$ – расчетная траектория системы при заданном управлении;

$$H_{j+1} = (1 + \delta_{j+1}^+) \left(H_{j+1|j} + \frac{d^2}{\delta_{j+1}^+} L_n L_n^T \right);$$

$$H_{j+1|j} = AH_j A^T;$$

$$\delta_{j+1}^+ = \frac{\kappa_{j+1} \sqrt{\kappa_{j+1}^2 (n-1)^2 + 4n} - \kappa_{j+1}^2 (n-1)}{2n};$$

$\kappa_{j+1}^2 = L_n^T H_{j+1|j}^{-1} L_n d^2$; n – размерность вектора состояния.

Эллипсоид (20) при сохранении априорных предположений о динамике системы и границе возмущений имеет непустое пересечение с гиперслоем, определяемым уравнением (2).

Для моделирования взята матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1875 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}, \text{ собственные числа}$$

которой: $\lambda_l = 0,75; 0,5; -0,5$, $l = \overline{1, n}$, $n = 3$, и

векторы: $B^T = [0, 0, 1]$; $L_n^T = [0, 0, 1]$;

$h^T = [1, 0, 0]$. Пара (A, h) – наблюдаема [15].

Управление в (17) примем равным $u_j = 5$,

$\forall j \in \overline{1, k}$. “Возмущение” в канале управления

ζ_j зададим случайным равномерным

распределением с границей $d = \pm 1$, а “шум” в

канале наблюдения по такому же закону с

границей $c = \pm 0,1$. Вектор начального состояния

системы $x_0^T = [1, -2, 2]$ удовлетворяет условию

(18), где

$$H_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}, \bar{x}_0^T = [0, 0, 0].$$

Моделирование проведено в среде MATLAB.

В процессе оценивания имитировалось

скачкообразное изменение динамических

свойств системы – путем замены 3-й строки

матрицы A на $a_3 = [0,26 \ -0,92 \ 1,3]$.

Собственные числа матрицы A после этого

стали $\lambda_l = 0,5; 0,4 \pm 0,6i$, $l = \overline{1, n}$, $n = 3$.

Одновременно была вдвое увеличена граница

возмущающего воздействия: $d = \pm 2$. При этом алгоритм работал с исходной матрицей A и границей $d = \pm 1$.

На рис. 4 дан график изменения объема эллипсоида множества возможных состояний ненаблюдаемой системы, а на рис. 5 – график выполнения условия (20) – функция принадлежности вектора состояния системы эллипсоиду. Сплошной линией даны графики для случая системы с измененной динамикой и увеличенной границей возмущения, а прерывистой – графики системы без изменения динамики и границы возмущения.

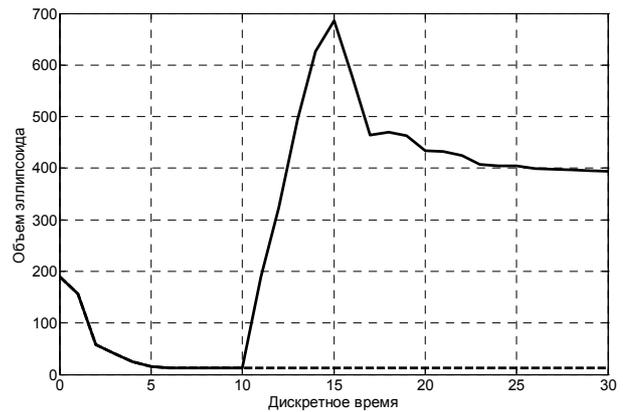


Рис. 4 – Изменение объема эллипсоида возможных состояний ненаблюдаемой системы

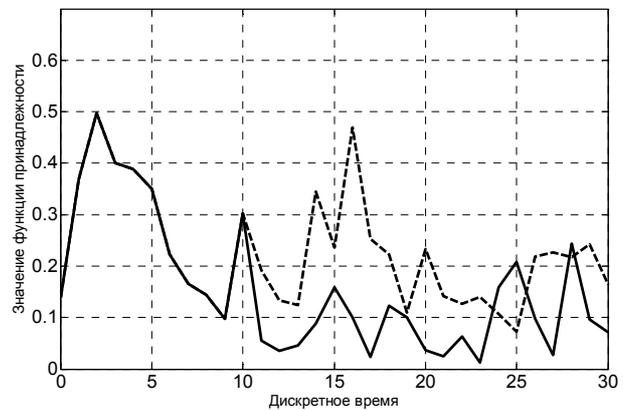


Рис. 5 – Функция принадлежности – проверка выполнения условия (20) для ненаблюдаемой системы

На рис. 6 даны графики объемов эллипсоида состояния системы до и после оценивания – без изменения ее динамики и границы возмущения: прерывистой линией – объем эллипсоида до оценки; сплошной линией – объем эллипсоида после оценки.

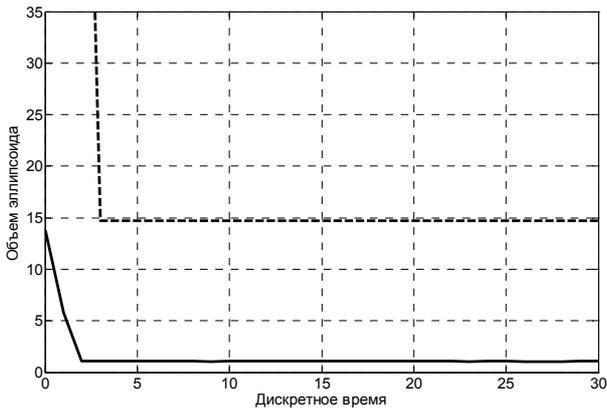


Рис. 6 – Изменение объема эллипсоида возможных состояний неизменной системы до и после наблюдения

На рис. 7 даны графики функции принадлежности для случая неизменной системы: прерывистой линией – функция принадлежности до оценки; сплошной линией – функция принадлежности после оценки.

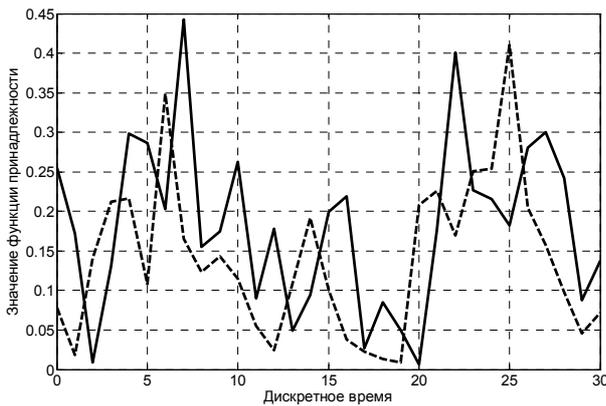


Рис. 7 – Функция принадлежности – проверка выполнения условия (20) для неизменной системы до и после наблюдения

На рис. 8 дан график функции принадлежности без изменения динамики наблюдаемой системы, но с увеличенной границей возмущения. Сплошной линией дан график функции принадлежности для измененной наблюдаемой системы, прерывистой – для неизменной.

На рис. 9 дан график функции принадлежности с измененной динамикой наблюдаемой системы и с увеличенной границей возмущения. Сплошной линией дан график функции принадлежности для измененной наблюдаемой системы, прерывистой – для неизменной.

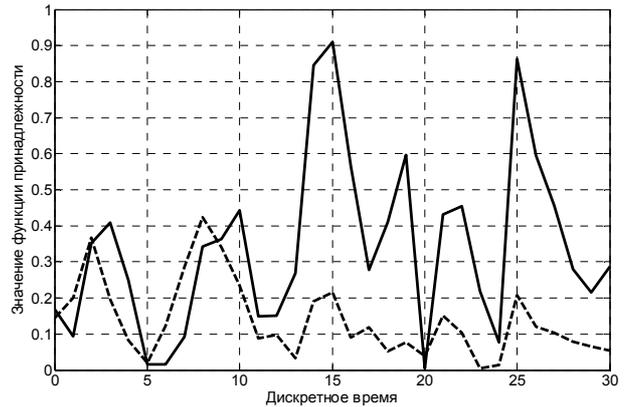


Рис. 8 – Функция принадлежности – проверка выполнения условия (20) для наблюдаемой системы с увеличенной границей возмущения

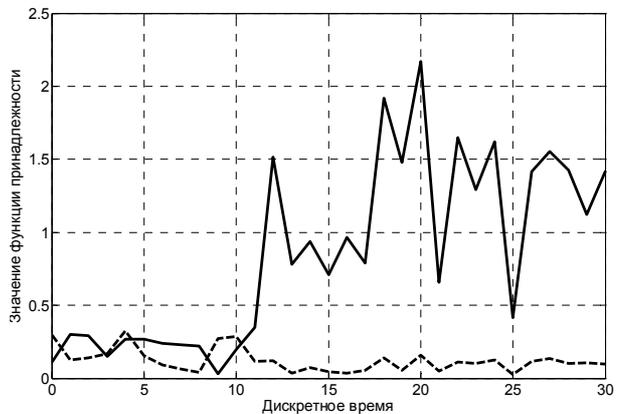


Рис. 9 – Функция принадлежности – проверка выполнения условия (20) для системы с увеличенной границей возмущения и с измененной динамикой

4. ВЫВОДЫ

По результатам моделирования работы алгоритма и исследования зависимости между его параметрами и параметрами наблюдаемой системы можно рекомендовать применение подобных алгоритмов в случае небольшой размерности пространства состояний системы. По этой же причине возможные модификации алгоритма необходимо проверять на ухудшение информативности наблюдений, то есть на снижение чувствительности к выделению полезного сигнала из “шума” наблюдателя.

Из рисунков 8 и 9 делаем выводы, что алгоритм сохраняет постоянную робастность при нарушении априорных предположений о границах внешнего возмущающего воздействия. В случае дополнительного изменения динамики системы алгоритм позволяет “захватывать” вектор состояния системы, но периодически “теряет” его из-за неучёта динамики системы. В

этом случае необходимо вводить еще один “наблюдатель”, по возможности ортогональный первому.

5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф.Л. Черноусько. *Оценивание фазового состояния динамических систем*. – Москва: Наука, 1988. – 320 с.
- [2] С.С. Ривкин, Р.И. Ивановский, А.В. Костров. *Статистическая оптимизация навигационных систем*. – Ленинград: Судостроение, 1976. – 280 с.
- [3] О.А. Степанов. *Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации*. 3-е издание, Санкт-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”, 2003. – 370 с.
- [4] О.Н. Анучин, И.Э. Комарова, Л.Ф. Порфирьев. *Бортовые системы навигации и ориентации искусственных спутников Земли*. Санкт-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”, 2004. – 326 с.
- [5] В.В. Мелешко. *Инерциальные навигационные системы*. Киев: “Корнейчук”, 1999. – 126 с.
- [6] Э. Гай. *Наводящиеся снаряды с инерциальной навигационной системой на микромеханических датчиках, интегрированной с GPS*. В кн.: “Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации. Сборник статей и докладов”. Под общей редакцией В.Г. Пешехонова. Санкт-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”, 2001. – с. 101-109.
- [7] D. Joachim, J.R. Deller, Adaptive optimal bounded-ellipsoid identification with an error under-bounding safeguard: applications in state estimation and speech processing, *Acoustics, Speech, and Signal Processing*, (2000).
- [8] Д.Б. Юдин, А.С. Немировский. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач, *Экономика и математические методы*, 12 (2) (1976). с. 357-369.
- [9] Н.З. Шор, В.И. Гершович. Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*, 4 (1979). с. 62-67.
- [10] Г.М. Бакан, Е.А. Нижниченко. Алгоритм решения счетной системы линейных алгебраических уравнений с использованием операции растяжения пространства, *Кибернетика*, 5 (1980). с. 42-48.
- [11] В.В. Волосов. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем. *Автоматика*, 3 (1991). с. 24-32.
- [12] Н.В. Ефименко, А.К. Новиков. Регуляризованные эллипсоидальные наблюдатели и их применение к задаче определения ориентации космического аппарата. *Проблемы управления и информатики*, 6 (1998). с. 145-155.
- [13] Г.М. Бакан, А.В. Шолохов. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы. *Проблемы управления и информатики*, 1 (2007). с. 16-25.
- [14] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*. Под редакцией М.Абрамовича и И.Стиган. Москва: Наука, 1979. – 832 с.
- [15] *Справочник по теории автоматического управления*. Под общей редакцией А.А. Красовского. Москва: Наука, 1987. – 712 с.
- [16] Р. Хорн, Ч. Джонсон. *Матричный анализ*. Москва: Мир, 1989. – 655 с.
- [17] Бакан Г.М., Шолохов А.В. К определению множества достижимости линейной управляемой системы, *Проблемы управления и информатики*, 4 (2005). с. 15-24.



Алексей Шолохов, родился в 1972 году, закончил НТУУ “КПИ” в 2001 г. по специальности “Приборы и системы управления летательными аппаратами и комплексами”. В 2006 г. закончил очную аспирантуру на кафедре математических методов системного анализа УНК “ИПСА” в структуре НТУУ “КПИ”. В настоящее время работает инженером на КП СПС “Арсенал” и одновременно преподает в УНК “ИПСА” дисциплины: “Математическое моделирование сложных систем” и “Статистический анализ случайных процессов”.
Научные интересы: системы инерциальной навигации, комплексирование навигационных датчиков, методы и средства обработки навигационной информации.



DEVELOPMENT OF THE GUARANTEED ESTIMATION ROBUST ALGORITHM OF LINEAR CONTROLLED SYSTEM STATES

Aleksey V. Sholokhov

Educational-Scientific Complex "Institute for Applied System Analyses"
by the National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute"
37, Peremogy Avenue, Academic Building #35, Kyiv 03056, Ukraine
e-mail: gyroalex@mail.ru

Abstract: *Ellipsoidal approximation of the ellipsoid and hyperlayer crossing has been considered as a basis of the algorithm of states estimation of the linear controlled system whose set of possible states is represented with an ellipsoid, and observations – with a hyperlayer. This representation is considered as an analogue of Kalman filter. The conditions of a priori system state and a posteriori measurement information compatibility and sensitivity of the algorithm to a choice of its parameters have been investigated. Dependence of the system state estimate improvement on a relative width of the hyperlayer of a set of observations has been shown. The obtained algorithm in comparison with the known solutions at minor degradation of accuracy is much easier in realization and stabler in operation from the standpoint of prior guesses violation.*

Keywords: *Linear controlled system, a set of attainability, a hyperlayer of a set of system states observation, approximating ellipsoid, guaranteed state estimation, a robust algorithm, a criterion of observations information value, a step of algorithm, Kalman filter.*

1. INTRODUCTION

In this work the robust algorithm of the guaranteed estimation of a set of possible states of the linear controlled system is developed and investigated [1]. In this article we mean conformity of the algorithm with two conditions by the robustness property: first, conservation of operability at the violation of prior guesses of the observable object parameters; secondly, "non-deterioration" of the state estimate of the object during estimation. For this purpose in the algorithm intermediate and final results are checked against prior guesses and a current estimate of the system state. At the violation of prior guesses or estimate deterioration the algorithm parameters are redefined. A result of work of the algorithm can be geometrically represented as an ellipsoid approximating the crossing of a priori ellipsoidal set of attainability of the linear controlled system [1] and a hyperlayer representing according to the data of observation a set of possible states of the controlled system limited by two parallel hyperplanes. In practice such a problem arises, for example, at the accelerated alignment of gyro-stabilized platforms under conditions of statistical uncertainty of external influences;

correction in the complex orientation and navigation systems [2-7] when an accuracy class of these devices does not enable to achieve marked improvement of quality of work by using data processing complex algorithms.

An approximating ellipsoid minimum volume is taken as a criterion of optimality. This criterion is convenient because of invariance of affine transformations relative to initial sets for obtaining of a minimum ellipsoid [1]. The parameters of the minimum volume ellipsoid circumscribed about a spherical layer or a segment have been evaluated in [8] for a hemisphere and in [9] for a hyperlayer. In [10] we obtain the algorithm of ellipsoidal approximation of the ellipsoid and hyperplane crossing where an approximating ellipsoid volume dependent on several parameters is expressed through the function of these parameters called a step of algorithm. The further works have been devoted to the development of universal and more convenient algorithms for obtaining of the specified approximation. In work [11], for example, for obtaining of the parameters of the minimum volume ellipsoid approximating the ellipsoid and hyperlayer crossing a quadric equation should be solved.

In [12] the algorithm in which a step of algorithm of approximating ellipsoid obtaining has only two

values depending on a degree of the hyperlayer and initial ellipsoid crossing has been suggested. Though it greatly simplifies calculations, but a possibility of specification of the system state ellipsoidal estimate considerably decreases, respectively. In [13] we have obtained a condition of step choice for construction of the approximating ellipsoid when an initial ellipsoid and a hyperlayer only touch each other. Dependence of improvement of the system state estimate on a relative width of the hyperlayer has been shown.

1. PROBLEM DEFINITION

E_j system state ellipsoid is set as

$$\{x_j : (x_j - \bar{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \leq 1\} \quad (1)$$

$x_j \in E_j, j \in T_0, j = 1, \dots, k, (k < \infty)$ is discrete time; $E_j \subset X_j = R^n$ is a compact set of possible values of the initial state, \bar{x}_j and $H_j^T = H_j > 0$ are set n is a measuring vector and $(n \times n)$ is a matrix, respectively. The E_j change in the course of time is determined with dynamic system properties [13].

Watch equation

$$y_j = h^T x_j + \xi_j, |\xi_j| \leq c, j = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

where $y_j \in R^1; h \in R^n, \|h\|=1$ is a measuring device parameter; $\xi_j \in R^1$ is a restricted measurements interference; $c \geq 0$ is a set constant. The equation (2) in R^n space determines the hyperlayer

$$S_j = \{x_j : (y_j - h^T x_j)^2 \leq c^2\}. \quad (3)$$

On the basis (1) and (3) according to work [13] the guaranteed estimate $E_{j+1} \supset E_j \cap S_j$

$$E_{j+1} : (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1})^T H_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1}) \leq 1 \quad (4)$$

less by volume than the initial ellipsoid (1) is built, otherwise the initial ellipsoid remains.

$$\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \tau_j \frac{H_j h_j}{e_j} \sigma_j \quad (5)$$

$$H_{j+1} = (H_j - \tau_j \frac{H_j h h^T H_j}{e_j^2}) \gamma_j^2 \quad (6)$$

$$\gamma_j^2 = 1 + \tau_j \left(\frac{1}{1 - \tau_j} \chi_j^2 - \sigma_j^2 \right) \quad (7)$$

$$\tau_j \leq \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}, 0 \leq \tau_j < 1, q_j^{-1} > 0 \quad (8)$$

Here:

$$e_j^2 = h_j^T H_j h_j; \sigma_j = \frac{\Delta_j}{e_j}; \chi_j^2 = \frac{c^2}{e_j^2};$$

$\Delta_j = y_j - h_j^T \bar{x}_j$ is a distance from the centre of the initial ellipsoid to the hyperlayer middle;

$h_j \in R^n$ is a parameter of the observer; \bar{x}_j is a

centre of the initial ellipsoid;

\bar{x}_{j+1} is a centre of the approximating ellipsoid;

If a condition of a priori ellipsoid and observation compatibility is violated: $1 + \chi \geq \sigma$ scaling should be performed $H_{j+1} = \sigma_j^2 H_j$.

A condition of observations informativity [12]:

$$\frac{\det H_{j+1}}{\det H_j} = (1 - \tau_j) \left(1 + \tau_j \left(\frac{\chi_j^2}{1 - \tau_j} - \sigma_j^2 \right) \right)^n \leq 1. \quad (9)$$

Fig. 1 for case $n = 2$ shows the crossing of E_j ellipsoid and S_j observations hyperlayer, and approximation of the crossing of abscissas by the ellipsoid E_{j+1} .

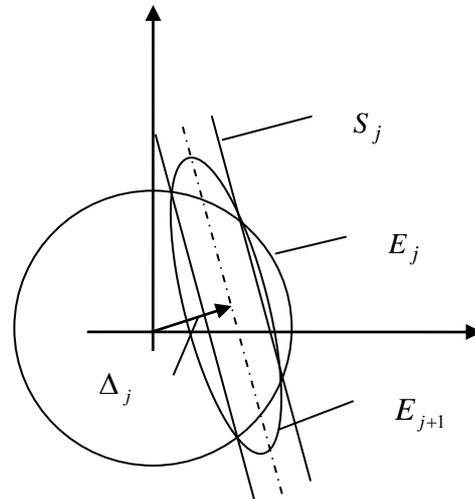


Fig. 1 – Ellipsoidal approximation of ellipsoid and hyperlayer crossing

2. APPROXIMATION OF CROSSING OF THE ELLIPSOIDAL SET OF ATTAINABILITY AND HYPERLAYER BY THE ELLIPSOID

A simplified step is used

$$\tau = (1 + n(\sigma^2 - \chi^2)) / (1 + n\sigma^2) \quad (10)$$

$$q = (1 + n(\sigma^2 - \chi^2)) / (n\chi^2 e^2) \quad (11)$$

η parameter corresponds q parameter in [11]

$$\eta = ((1 - \sigma^2) - (2n - 1)\chi^2 + \sqrt{D}) / (2(n - 1)\chi^2 e^2) \quad (12)$$

$D = ((2n - 1)\chi^2 - (1 - \sigma^2))^2 - 4(n - 1)\chi^2(n(\chi^2 - \sigma^2) - 1)$
 χ_{bound} boundary half-width of the hyperlayer has been determined. The ‘‘observation result cancellation’’ takes place with it. It is the same for (11) and (12)

$$\chi_{bound} = \sqrt{(1 + n\sigma^2) / 2n} \quad (13)$$

Let us assume $|\sigma| + \chi = 1$. Then with $\sigma = (n - 1) / 2n$ we shall obtain maximum half-width of the hyperlayer

$$\chi = (n + 1) / 2n \quad (14)$$

Let us assume in expression (13) $\sigma = 0$. Having directed $n \rightarrow \infty$ we shall obtain from (13) and (14)

$$\lim_{\sigma=0, n \rightarrow \infty} \chi_{bound} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = (n - 1) / 2n = 1/2, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{bound} = (n + 1) / 2n = 1/2.$$

Fig. 2 and 3 show the diagrams of observations informativity dependence on hyperlayer width (ratios $\det H_{j+1} H_j^{-1}$) for $n = 2$ case. In Fig. 2 the middle of observations hyperlayer passes the centre of the initial ellipsoid, i.e. $\sigma = 0$. In Fig. 3 – $\sigma = (n - 1) / 2n$. The hyperlayer width χ is set by the abscissa axis, and by the ordinate axis – a value of informativity criterion (9). The full line corresponds to a step by formula (11), the dash line – to (12).

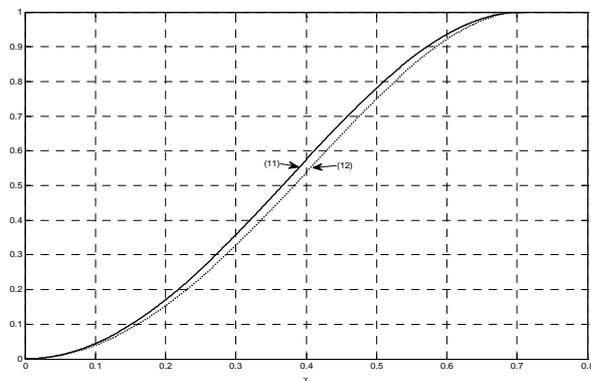


Fig. 2 – Observations informativity change depending on $\sigma = 0$ hyperlayer width

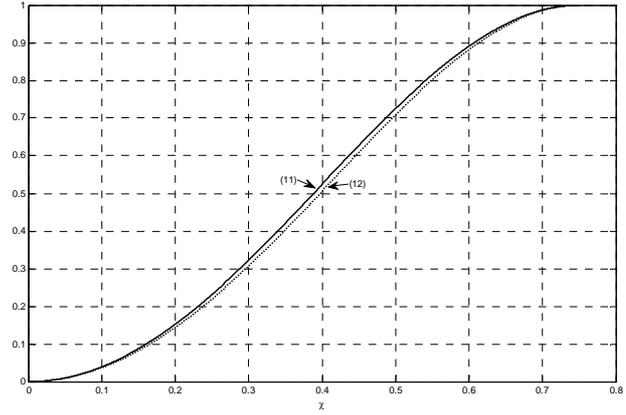


Fig. 3 – Observations informativity change depending on $\sigma = (n - 1) / 2n$ hyperlayer width

It follows from (15) that with n growth the requirements for accuracy of the observer grow as well.

The observable system states ellipsoid parameters (including an ellipsoid volume) will be connected with the measuring device parameters, measurement interference, system properties and external disturbance by means of the following dependence

$$h^T H h \geq c^2 n \quad (16)$$

If h vector is an eigenvector or close to such a vector of the matrix corresponding to the least eigenvalue of H [16] matrix, we shall have a small volume of the approximating ellipsoid with small uncertainty by one phase coordinate corresponding to the least eigenvalue, and with greater uncertainty by other phase coordinates.

3. MODELLING

There is a linear controlled system

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + L_n \zeta_j, \quad |\zeta_j| \leq d, \quad x_0 \in E_0, \quad (17)$$

$$E_0 = \{x_0 : (x_0 - \bar{x}_0)^T \bar{H}_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \leq 1\} \quad (18)$$

where $A - (n \times n)$ is a matrix; L_n and $B - n$ are measuring vectors. The pair (A, B) is controlled [15]; $\zeta_j \in R^1$ is a scalar disturbance restricted with $d \geq 0$ set constant; \bar{x}_0 и $\bar{H}_0^T = \bar{H}_0 > 0$ known n is a measuring vector and $(n \times n)$ is a matrix.

Controls $u_j \in R^1$ are set at the whole interval T

$$\{u_j \in R^1, j \in T\}, \quad \bar{x}_j = A\bar{x}_{j-1} + Bu_{j-1} \quad (19)$$

$$E_j = \{x_j : (x_j - \bar{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \leq 1\} \quad (20)$$

The following parameters are taken for the model:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1875 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix};$$

$$\bar{x}_0^T = [0, 0, 0]; \quad x_0^T = [1, -2, 2]; \quad L_n^T = [0, 0, 1];$$

$$B^T = [0, 0, 1]; \quad h^T = [1, 0, 0]; \quad u_j = 5, \quad c = 0,1.$$

Modelling has been carried out in MATLAB according to [13]. In the process of estimation a discontinuous change of the system dynamic properties by means of replacement of the 3d line of A matrix to $a_3 = [0,26 \quad -0,92 \quad 1,3]$ has been simulated. The disturbing influence bound has been increased at the same time: $d = 2$. And the algorithm has operated with A initial matrix and bound $d = 1$.

Fig. 4 shows a membership function value without change of observable system dynamics, but with scaled-up disturbance bound. The full line is the changed observable system, the dash line is unchanged system.

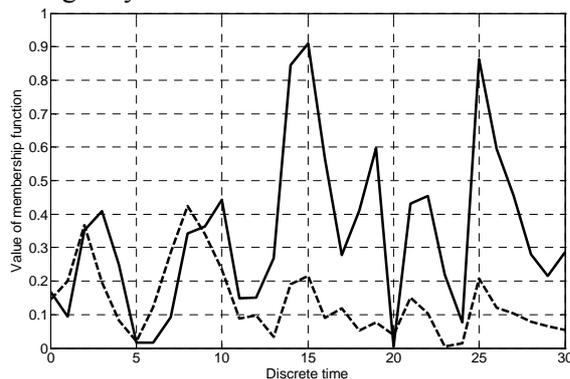


Fig. 4 – Membership function – check of fulfillment of conditions (20) for the observable system with a scaled-up disturbance bound

Fig. 5 shows a membership function value with changed dynamics of the observable system and scaled-up disturbance bound. The full line is a membership function for the changed observable system, the dash line – for the unchanged system.

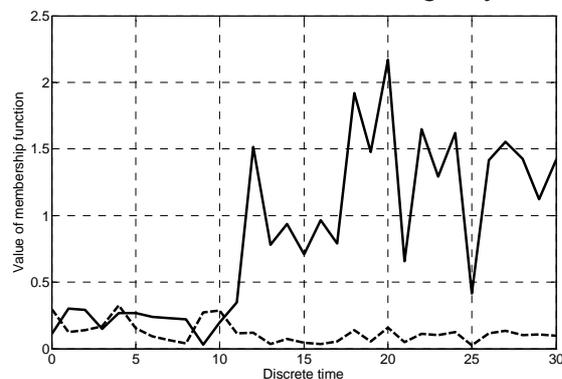


Fig. 5 – Membership function – check of fulfillment of conditions (20) for the system with a scaled-up disturbance bound and changed dynamics

4. CONCLUSION

By the results of algorithm operation modelling and investigations of dependence between its parameters and parameters of the observable system such algorithms can be recommended for application in case of small spatial dimension of system states. For the same reason possible algorithm modifications shall be checked on deterioration of observations informativity i.e. on decrease in sensitivity to useful signal extraction from the observer “noise”.

5. REFERENCES

- [1] F.L. Chernousko, *Estimation of Dynamic Systems Phase State*, Moscow: Nauka, 1988. 320 p.
- [2] S.S. Rivkin, R.I. Ivanovsky, A.V. Kostrov, *Statistical Optimization of Navigation Systems*, Leningrad: Shipbuilding, 1976. 280 p.
- [3] O.A. Stepanov, *Application of the Nonlinear Filtration Theory in Navigation Data Processing Problems*, 3^d, edition St.-Petersburg: TsNII (Elektropribor Central Research Institute), 2003. 370 p.
- [4] O.N. Anuchin, I.E. Komarova, L.F. Porfiriev, *Onboard Navigation and Orientation Systems of Artificial Satellites of the Earth*, St.-Petersburg: TsNII Elektropribor, 2004. 326 p.
- [5] V.V. Meleshko, *Inertial Navigation Systems*, Kiev: Korneichuk, 1999. 126 p.
- [6] E. Gai, *Guiding Munitions with a Micromechanical INS/GPS-System*, In the book: “Integrated Inertial-Satellite Navigation Systems. Collection of Articles and Reports”. Edited by V.G. Peshekhonov. St.-Petersburg: TsNII Elektropribor, 2001. – pp. 101-109.
- [7] D. Joachim, J.R. Deller, Adaptive optimal bounded-ellipsoid identification with an error under-bounding safeguard: applications in state estimation and speech processing, *Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2000.
- [8] D.B. Yudin, A.S. Nemirovsky, Information complexity and efficient methods of solution of convex extremal problems, *Economics and Mathematical Methods*, 12 (2) (1976). – pp. 357-369.
- [9] N.Z. Shor, V.I. Gershovich, On a family of algorithms for solution of convex programming problems, *Cybernetics*, 4 (1979). – pp. 62-67.
- [10] G.M. Bakan, E.A. Nizhnicenko, Algorithm of solution of the linear algebraic equations countable system with the use of space dilation operation, *Cybernetics*, 5 (1980). – pp. 42-48.
- [11] V.V. Volosov, On a Way of Construction of the Ellipsoidal Estimates in the Problems of

- Nonstochastic Filtration and Identification of the Controlled Systems Parameters, *Automatics*, 3 (1991). – pp. 24-32.
- [12] N.V. Yefimenko, A.K. Novikov, Regularized ellipsoidal observers and their application to the problem of spacecraft orientation definition, *Journal of Automaiton and Information Sciences*, 6 (1998). – pp. 145-155.
- [13] G.M. Bakan, A.V. Sholokhov, To construction of the robust algorithm of the guaranteed estimation of a linear controlled system state, *Journal of Automaiton and Information Sciences*, 1 (2007). – pp. 16-25.
- [14] *Reference Book on the Special Functions with Formulae, Diagrams, and Tables*, Edited by M. Abramovich and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. – 832 p.
- [15] *Reference Book on the Automatic Control Theory*, Edited by A.A. Krasovsky. Moscow: Nauka, 1987. – 712 p.
- [16] R. Horn, Ch. Johnson, *Matrix Analysis*, Moscow: Mir, 1989. – 65 p.